Title	集合の二項関係に基づくスカラー化関数の計算アルゴリズムと数値実験 (非線形解析学と凸解析学の研究)
Author(s)	于, 慧; 田中, 環
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2019), 2114: 223-228
Issue Date	2019-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/252061
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 第2114巻 2019年 223-228

集合の二項関係に基づくスカラー化関数の計算アルゴリズムと数値実験

新潟大学・大学院自然科学研究科　于　慧　田中　環

1.　はじめに

本研究では集合の二項関係に基づいたスカラー化関数に対する数値計算法を提案する。近年，集合に対するスカラー化関数の理論的な結果が数多く発表されたが（[7] とその参考文献参照），[15] を除き，具体的に計算機で数値を求めるアルゴリズムは提案されていない。本研究では，[15] で考えられているように有限次元での凸多面体に対するスカラー化関数の数値計算アルゴリズムを紹介する。

2.　集合の二項関係に基づくスカラー化関数

実線形位相空間 X において，C を X の空でない凸錐とすると，X に前順序 $\leq_C$（反射律と推移律を満たす二項関係）が定まる（$x, y \in X$ に対して $y - x \in C$ が成立するとき，$x \leq_C y$ と定義する)。さらに，X の空でない二つの集合 A と B の二項関係を以下のように定める（[9]）。

定義 2.1 $\emptyset \neq A, B \subset X$ とする。

(i) $A \leq_C^{(1)} B \overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq_C b \iff A \subset \bigcap_{b\in B}(b - C);$

(ii) $A \leq_C^{(2)} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists a \in A \text{ s.t. } \forall b \in B,\ a \leq_C b \iff A \cap \left(\bigcap_{b\in B}(b - C)\right) \neq \emptyset;$

(iii) $A \leq_C^{(3)} B \overset{\text{def}}{\iff} \forall b \in B,\ \exists a \in A \text{ s.t. } a \leq_C b \iff B \subset A + C;$

(iv) $A \leq_C^{(4)} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists b \in B \text{ s.t. } \forall a \in A,\ a \leq_C b \iff \left(\bigcap_{a\in A}(a + C)\right) \cap B \neq \emptyset;$

(v) $A \leq_C^{(5)} B \overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A,\ \exists b \in B \text{ s.t. } a \leq_C b \iff A \subset B - C;$

(vi) $A \leq_C^{(6)} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists a \in A,\ \exists b \in B \text{ s.t. } a \leq_C b \iff A \cap (B - C) \neq \emptyset.$

命題 2.1 $\emptyset \neq A, B \subset X$ に対して，次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&A \leq_C^{(1)} B \textit{ iff } B \leq_{-C}^{(1)} A; &\quad& A \leq_C^{(2)} B \textit{ iff } B \leq_{-C}^{(4)} A;\\
&A \leq_C^{(3)} B \textit{ iff } B \leq_{-C}^{(5)} A; && A \leq_C^{(4)} B \textit{ iff } B \leq_{-C}^{(2)} A;\\
&A \leq_C^{(5)} B \textit{ iff } B \leq_{-C}^{(3)} A; && A \leq_C^{(6)} B \textit{ iff } B \leq_{-C}^{(6)} A.
\end{aligned}$$

上の二項関係に基づいたスカラー化関数を次のように定める（[11]）。

定義 2.2 $\emptyset \neq A, V \subset X$ とし，$C \neq X$ で $k \in \operatorname{int} C$ とする。各 $j = 1, \ldots, 6$ に対して，

$$I_{k,V}^{(j)}(A) := \inf\left\{t \in \mathbb{R} \;\middle|\; A \leq_C^{(j)} (tk + V)\right\}.$$

このスカラー化関数は [8] で導入された（集合に対する）スカラー化関数の一般化になっているが，元々[4, 5] で導入された劣線形関数をヒントに作られている。

3.　集合の二項関係に基づくスカラー化関数の変形

この節では、定義 2.2 のスカラー化関数をベクトル指向の表現に変形する。

命題 3.1 スカラー化関数を以下のように変形できる。

(i) $I_{k,V}^{(1)}(A) = \sup_{a\in A}\sup_{v\in V}\inf\{t \in \mathbb{R} \mid a \leq_C v + tk\};$

(ii) $I_{k,V}^{(2)}(A) = \inf_{a\in A}\sup_{v\in V}\inf\{t \in \mathbb{R} \mid a \leq_C v + tk\};$

(iii) $I^{(3)}_{k,V}(A) = \sup_{v\in V}\inf_{a\in A}\inf\{t\in\mathbb{R} \mid a \leq_C v+tk\};$

(iv) $I^{(4)}_{k,V}(A) = \inf_{v\in V}\sup_{a\in A}\inf\{t\in\mathbb{R} \mid a \leq_C v+tk\};$

(v) $I^{(5)}_{k,V}(A) = \sup_{a\in A}\inf_{v\in V}\inf\{t\in\mathbb{R} \mid a \leq_C v+tk\};$

(vi) $I^{(6)}_{k,V}(A) = \inf_{a\in A}\inf_{v\in V}\inf\{t\in\mathbb{R} \mid a \leq_C v+tk\}.$

この命題を使って，与えられた集合 A に対する $I^{(j)}_{k,V}(A)$ $(j=1,\ldots,6)$ の値を計算機で計算する方法を提案する。

4. スカラー化関数の計算アルゴリズムと数値実験

計算機で取扱いのできるように，対象となる空間 X をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ として，その部分集合である凸多面体 $A=\mathrm{co}\,\{a_1,\ldots,a_\alpha\}$ に対する，参照集合 $V=\mathrm{co}\,\{v_1,\ldots,v_\beta\}$ によるスカラー化関数の計算アルゴリズムを考える。ここで，$\mathrm{co}\,\{a_1,\ldots,a_\alpha\}$ はベクトル $a_1,\ldots,a_\alpha$ の凸包を表している。また，順序錐 C を（非負象限 $\mathbb{R}^n_+$ より）一般化して，$p_1,\ldots,p_m\in\mathbb{R}^n\backslash\{\theta^n\}(m\geq n)$ を用いて，

$$C := \bigcap_{i=1}^{m}\{x\in X \mid \langle p_i, x\rangle \geq 0\}$$

とすると，C は閉凸錐となり，$k\in\mathrm{int}\,C$ を仮定することで，$\langle p_i,k\rangle>0$ $(i=1,\ldots,m)$ となる。

命題 4.1 ([1] の Proposition 1.44 と Corollary 1.45 参照) $k\in\mathrm{int}\,C$ と $x\in\mathbb{R}^n$ に対して，次が成り立つ。

$$\inf\{t\in\mathbb{R} \mid x\leq_C tk\} = \max_{i=1,\ldots,m}\left\langle \frac{p_i}{\langle p_i,k\rangle}, x\right\rangle.$$

$a\in A$ と $v\in V$ に対して，命題 4.1 の x を $a-v$ に置き換えることにより、命題 3.1 の 6 つのスカラー化関数計算手法を与えることができる。

定理 4.1 $k\in\mathrm{int}\,C$ とし，任意の $q\in\mathbb{N}$ に対して，$I(q):=\{1,\ldots,q\}$,

$$M^q := \left\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_q)\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{r=1}^{q}\lambda_r=1,\ \lambda_r\geq 0 \ for\ r\in I(q)\right\}$$

とおくと，次が成り立つ。

(i) $I^{(1)}_{k,V}(A) = \max_{s\in I(\alpha)}\max_{j\in I(\beta)}\max_{i\in I(m)}\left\langle \frac{p_i}{\langle p_i,k\rangle}, a_s - v_j\right\rangle;$

(ii) $I^{(2)}_{k,V}(A) = \min_{\lambda\in M^\alpha}\max_{j\in I(\beta)}\max_{i\in I(m)}\left\langle \frac{p_i}{\langle p_i,k\rangle}, \sum_{s=1}^{\alpha}\lambda_s a_s - v_j\right\rangle;$

(iii) $I^{(3)}_{k,V}(A) = \max_{j\in I(\beta)}\min_{\lambda\in M^\alpha}\max_{i\in I(m)}\left\langle \frac{p_i}{\langle p_i,k\rangle}, \sum_{s=1}^{\alpha}\lambda_s a_s - v_j\right\rangle;$

(iv) $I^{(4)}_{k,V}(A) = \min_{\mu\in M^\beta}\max_{s\in I(\alpha)}\max_{i\in I(m)}\left\langle \frac{p_i}{\langle p_i,k\rangle}, a_s - \sum_{j=1}^{\beta}\mu_j v_j\right\rangle;$

(v) $I^{(5)}_{k,V}(A) = \max_{s\in I(\alpha)}\min_{\mu\in M^\beta}\max_{i\in I(m)}\left\langle \frac{p_i}{\langle p_i,k\rangle}, a_s - \sum_{j=1}^{\beta}\mu_j v_j\right\rangle;$

(vi) $I^{(6)}_{k,V}(A) = \min_{\lambda\in M^\alpha}\min_{\mu\in M^\beta}\max_{i\in I(m)}\left\langle \frac{p_i}{\langle p_i,k\rangle}, \sum_{s=1}^{\alpha}\lambda_s a_s - \sum_{j=1}^{\beta}\mu_j v_j\right\rangle.$

この定理より高々$\alpha \times \beta \times m$個の実数の最大値を求めることで，$I_{k,V}^{(1)}(A)$を計算できる。その一方，$I_{k,V}^{(2)}(A), \ldots, I_{k,V}^{(6)}(A)$は凸結合の形を含んでいるために、線形計画問題を解く必要がある。

$I_{k,V}^{(2)}(A)$の値の計算については，次の$(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha)$に関する線形計画問題を解くことで，値が求められる。

$$
\text{(LP(2))}: \boxed{\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & t \in \mathbb{R} \\
\text{subject to} & t \geq \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k\rangle}, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - v_j \right\rangle, \text{ for all } i \in I(m),\ j \in I(\beta), \\
& \displaystyle\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1, \\
& \lambda_s \geq 0 \quad (s = 1, \ldots, \alpha).
\end{array}}
$$

さらに，上記の問題は次のように変形できる。

$$
\boxed{\begin{array}{ll}
\text{Min} & t \in \mathbb{R} \\
\text{s.t.} & \displaystyle\min_{j \in I(\beta)} \langle p_1, v_j \rangle \geq \left\langle p_1, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \right\rangle, \\
& \vdots \\
& \displaystyle\min_{j \in I(\beta)} \langle p_m, v_j \rangle \geq \left\langle p_m, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \right\rangle, \\
& \displaystyle\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1, \\
& \lambda_s \geq 0 \quad (s = 1, \ldots, \alpha).
\end{array}}
$$

次の$(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha)$に関する線形計画問題LP(3-1), LP(3-2), …, LP(3-β)を解いて，β個の値の最大値として，$I_{k,V}^{(3)}(A)$の値が求められる。

$$
\text{(LP(3-1))}: \boxed{\begin{array}{ll}
\text{Min} & t \in \mathbb{R} \\
\text{s.t.} & t \geq \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k\rangle}, \displaystyle\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - v_1 \right\rangle, \text{ for all } i \in I(m), \\
& \displaystyle\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1, \\
& \lambda_s \geq 0 \quad (s = 1, \ldots, \alpha).
\end{array}}
$$

$$\vdots$$

$$
\text{(LP(3-}\beta\text{))}: \boxed{\begin{array}{ll}
\text{Min} & t \in \mathbb{R} \\
\text{s.t.} & t \geq \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k\rangle}, \displaystyle\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - v_\beta \right\rangle, \text{ for all } i \in I(m), \\
& \displaystyle\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1, \\
& \lambda_s \geq 0 \quad (s = 1, \ldots, \alpha).
\end{array}}
$$

さらに，上記の問題は次のように変形できる。

$$
\text{(LP(3-1))}: \boxed{\begin{array}{ll}
\text{Min} & t \in \mathbb{R} \\
\text{s.t.} & \langle p_1, v_1 \rangle \geq \langle p_1, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \rangle, \\
& \quad \vdots \\
& \langle p_m, v_1 \rangle \geq \langle p_m, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \rangle, \\
& \displaystyle\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1, \\
& \lambda_s \geq 0 \ \ (s = 1, \ldots, \alpha).
\end{array}}
$$

$$\vdots$$

$$
\text{(LP(3-}\beta\text{))}: \boxed{\begin{array}{ll}
\text{Min} & t \in \mathbb{R} \\
\text{s.t.} & \langle p_1, v_\beta \rangle \geq \langle p_1, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \rangle, \\
& \quad \vdots \\
& \langle p_m, v_\beta \rangle \geq \langle p_m, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \rangle, \\
& \displaystyle\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1, \\
& \lambda_s \geq 0 \ \ (s = 1, \ldots, \alpha).
\end{array}}
$$

同様にして，$I_{k,V}^{(4)}(A), \ldots, I_{k,V}^{(6)}(A)$ の値も求められる。

新潟大学の Cloud Education System(仮想 Linux OS コンピューター, 4GB〜218GB Memory, 10GB Harddisk) を用いて，上記のアルゴリズムに対する数値実験を行った。

例 4.1 以下の 3 次元と 5 次元計算例に対して、C 言語を用いて、数値実験をした。

3 次元の計算例：

$$
\boxed{\begin{array}{l}
A = \text{co}\,\{a_1, \ldots, a_6\}, \\
a_1 = (0.2,\ 0,\ 1.6),\ a_2 = (1,\ 0,\ 0),\ a_3 = (0,\ 1,\ 1),\ a_4 = (0,\ 2,\ 0),\ a_5 = (0,\ 0,\ 1.666667),\ a_6 = (0,\ 0,\ 0); \\
V = \text{co}\,\{v_1, \ldots, v_6\}, \\
v_1 = (2.5,\ 1.5,\ 0),\ v_2 = (1,\ 0,\ 1.5),\ v_3 = (2.5,\ 0,\ 0),\ v_4 = (0,\ 4,\ 0),\ v_5 = (0,\ 0,\ 2),\ v_6 = (0,\ 0,\ 0); \\
C = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{3} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x \rangle \geq 0\}, \\
p_1 = (1,0,0),\ p_2 = (0,1,0),\ p_3 = (0,0,1); \\
k = (1,2,3).
\end{array}}
$$

計算結果は以下の通りである。

$I_{k,V}^{(1)}(A)$ の値：1.000000,
$I_{k,V}^{(2)}(A)$ の値：−0.000000,
$I_{k,V}^{(3)}(A)$ の値：0.000000,
$I_{k,V}^{(4)}(A)$ の値：0.259259,
$I_{k,V}^{(5)}(A)$ の値：−0.06667,
$I_{k,V}^{(6)}(A)$ の値：−0.444444,

計算にかかった時間：0.000111s.
5 次元の計算例：

$$
\begin{aligned}
&A = \mathrm{co}\,\{a_1, \ldots, a_6\} \\
&a_1 = (0.2,\ 0,\ 1.6,\ 1,\ 0);\ a_2 = (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 3);\ a_3 = (0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2); \\
&a_4 = (0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1);\ a_5 = (0,\ 0,\ 1.666667,\ 1.3,\ 0);\ a_6 = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2); \\
&V = \mathrm{co}\,\{v_1, \ldots, v_6\} \\
&v_1 = (2.5,\ 1.5,\ 0,\ 1,\ 0);\ v_2 = (1,\ 0,\ 1.5,\ 1,\ 0);\ v_3 = (2.5,\ 0,\ 0,\ 0.1,\ 2); \\
&v_4 = (0,\ 4,\ 0,\ 1,\ 0.5);\ v_5 = (0,\ 0,\ 2,\ 0.3,\ 0.4);\ v_6 = (0,\ 0,\ 0,\ 0.1,\ 0.5); \\
&C = \bigcap_{i=1}^{5} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x\rangle \geq 0\} \\
&p_1 = (1,0,0,0,0);\ p_2 = (0,1,0,0,0);\ p_3 = (0,0,1,0,0); \\
&p_4 = (0,0,0,1,0);\ p_5 = (0,0,0,0,1); \\
&k = (1,2,3,4,5).
\end{aligned}
$$

計算結果は以下の通りである。
$I^{(1)}_{k,V}(A)$ の値：1.000000,
$I^{(2)}_{k,V}(A)$ の値：0.205128,
$I^{(3)}_{k,V}(A)$ の値：0.180000,
$I^{(4)}_{k,V}(A)$ の値：0.383262,
$I^{(5)}_{k,V}(A)$ の値：0.276316,
$I^{(6)}_{k,V}(A)$ の値：−0.048252,
計算にかかった時間：0.000138s.

5. おわりに

これらは，[15] で提案された，4 つのスカラー化関数の数値計算法の一般化であり，本研究で紹介した 6 種類の inf 型スカラー化関数に加えて sup 型も考慮し，$V = \{\theta\}$，$C = \mathbb{R}^n_+$（$p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^n$ を基本ベクトル）とすることで，[15] で取り扱った 4 つのスカラー化関数が導き出せる。

参考文献

[1] G.-y. Chen, X. Huang, and X. Yang, *Vector optimization: Set-valued and variational analysis*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 541, Springer, Berlin, 2005.

[2] P. Gr. Georgiev and T. Tanaka, *Vector-valued set-valued variants of Ky Fan's inequality*, J. Nonlinear Convex Anal., **1**(3), 245–254, 2000.

[3] P. Gr. Georgiev and T. Tanaka, *Fan's inequality for set-valued maps*, Nonlinear Anal., **47**(1), 607–618, 2001.

[4] C. Gerstewitz (C. Tammer), *Nichtkonvexe dualität in der vektoroptimierung*, Wiss. Z. Tech. Hochsch. Leuna-Merseburg **25**(3), 357–364, 1983.

[5] C. Gerstewitz (C. Tammer) and E. Iwanow, *Duality for nonconvex vector optimization problems*, Workshop on vector optimization (Plaue, 1984). Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau **31**(2), 61–81, 1985.

[6] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu, *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[7] A. H. Hamel, F. Heyde, A. Löhne, B. Rudloff, and C. Schrage, *Set Optimization and Applications – The State of the Art*, Springer Proc. Math. Stat., 151, Springer, Heidelberg, 2015.

[8] A. H. Hamel and A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear Convex Anal., **7**(1), 19–37, 2006.

[9] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T. X. D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal., **30**(3), 1487–1496, 1997.

[10] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterizaton of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, in Proceedings of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, S. Akashi, W. Takahashi, and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama, 193–204, 2009.

[11] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Unified scalarization for sets and set-valued Ky Fan minimax inequality*, J. Nonlinear Convex Anal., **11**(3), 513–525, 2010.

[12] D. T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[13] S. Nishizawa and T. Tanaka, *On inherited properties for set-valued maps and existence theorems for generalized vector equilibrium problems*, J. Nonlinear Convex Anal., **5**(2), 187–197, 2004.

[14] Y. Ogata, Y. Saito, T. Tanaka, and S. Yamada, *Sublinear scalarization methods for sets with respect to set-relations*, Linear and Nonlinear Analysis, **3**(1), 121–132, 2017.

[15] Y. Sonda, T. Tanaka, and S. Yamada, *Computational methods on scalarizing functions for sets in a vector space,* Session ID: B3–5 in "Proceedings of the Japan Joint Automatic Control Conference," The Japan Joint Automatic Control Conference, Kyoto (Japan), 2010. DOI: 10.11511/jacc.52.0.137.0.